

## Grafs, amics i coneguts

C. DALFÓ, M.A. Fiol

**Resum** Com és ben sabut, un graf no dirigit és un objecte matemàtic que modelitza l'existència d'una certa relació entre parells d'elements d'un conjunt donat. Aleshores, no és gaire sorprenent que, al començament, molts dels resultats sobre grafs fessin referència a relacions entre persones o grups de persones. En aquest article, comentem quatre resultats d'aquest tipus, els quals estan relacionats amb diverses teories generals de grafs i les seves aplicacions: el lema de les encaixades de mans (relacionat amb la coloració de grafs i l'àlgebra booleana), un lema sobre els coneguts i desconeguts en una festa (relacionat amb la teoria de Ramsey), un lema sobre els amics en comú (relacionat amb la distància-regularitat i la teoria de codis) i el teorema de les noccs de Hall (relacionat amb la connectivitat de les xarxes).

**Paraules clau:** Graf, Aresta-coloració, Àlgebra booleana, Teoria de Ramsey, Distància-regularitat, Codis, Teorema de les noccs de Hall, Teorema de Menger.

**Classificació MSC2000:** 05C50, 05C05.

### 1 Introducció

Un graf  $G = (V, E)$  és una estructura matemàtica que consisteix en un conjunt de vèrtexs  $V$  i un conjunt d'arestes o branques  $E$  (o parells no-ordenats de vèrtexs). Normalment, cada vèrtex  $v \in V$  està representat per un punt i cada aresta  $uv$  per una línia que uneix els vèrtexs  $u$  i  $v$ . La teoria de grafs està molt relacionada amb la combinatòria, la qual és la part de les matemàtiques que tracta de les estructures discretes. En particular, la teoria de grafs és útil per estudiar qualsevol sistema amb una certa relació entre parelles d'elements, cosa que dona una relació binària. Per tant, és normal que molts dels problemes i resultats originalment fessin referència a relacions entre persones. Per exemple, un dels resultats més simples és el lema de l'encaixada de mans: *En una festa, un nombre parell de persones fan un nombre senar d'encaixades de mans*. També hi ha l'anomenat teorema de l'amistat: *En una*

*festa, si cada parell de persones té exactament un amic en comú, aleshores hi ha algú que és amic de tothom.* La primera demostració d'aquest teorema, i la més famosa, és de Paul Erdős (amb Alfred Rényi i Vera Sós), un matemàtic hongarès, probablement el més prolífic del segle XX, a qui, com a Euler, li agradava fer sentències com “*A mathematician is a device for turning coffee into theorems*” («Un matemàtic és un dispositiu que transforma cafè en teoremes») o “*Another roof, another proof*” («Un altre sostre, una altra demostració»). En la segona, mostrava la gran capacitat i predisposició que tenia per col·laborar amb altres matemàtics de tot el món.

Es considera que el primer article en teoria de grafs es va publicar el 1736. El seu autor és el gran matemàtic suís Leonhard Euler, de qui es diu que escrivia articles en la mitja hora entre el primer i el segon avís per dinar. Aquest primer article és sobre un camí a través dels ponts de Königsberg; vegeu Euler [9]. Aquesta ciutat era la capital de Prússia Oriental, on va néixer Immanuel Kant, i que avui correspon a la ciutat russa de Kaliningrad. El problema dels ponts de Königsberg està relacionat amb el trencaclosques de dibuixar una figura sense aixecar el llapis del paper i sense passar dos cops pel mateix lloc. En el problema original, es demanava si era possible caminar per la ciutat creuant cadascun dels ponts només una vegada.

Un altre dels problemes més famosos en teoria de grafs, que K. Appel i W. Haken [2] (en col·laboració amb J. Kock) no van resoldre fins el 1976, és el teorema dels quatre colors (T4C), el qual afirma que els països d'un mapa dibuixat en un pla es poden acolorir amb quatre colors, de manera que països amb una frontera comú (diferent d'un punt) tinguin colors diferents.

Com ja hem dit, la teoria de grafs s'utilitza per estudiar diferents relacions. Un primer exemple pot ser un circuit elèctric, amb tots els seus components i les seves connexions. En sistemes de telecomunicacions, la teoria de grafs contribueix a modelitzar, dissenyar i estudiar les xarxes d'interconnexió o comunicació. Per exemple, les xarxes d'interconnexió s'utilitzen en sistemes de multiprocessadors, on algunes unitats tenen la tasca d'intercanviar-se la informació i en xarxes locals, amb diferents ordinadors situats a prop els uns dels altres comunicant-se a gran velocitat. Pel que fa a les xarxes de comunicacions, actualment l'exemple més important és Internet, que permet la comunicació i l'intercanvi de dades entre ordinadors de tot el món. De fet, estem experimentant una revolució de les comunicacions, de manera que podem dir que estem ‘teixint’ la xarxa de comunicacions.

Per a més detalls sobre notació, conceptes bàsics i la història de la teoria de grafs, vegeu, per exemple, Harary [23] i Biggs, Lloyd i Wilson [4].

## 2 Encaixades de mans: coloracions i àlgebra booleana

Comencem amb un dels resultats més simples sobre grafs, el qual afirma que la suma dels graus del conjunt de vèrtexs  $V$  d'un graf  $G = (V, E)$  és igual al doble del nombre d'arestes  $E$ :

$$\sum_{u \in V} \delta(u) = 2|E|, \quad (1)$$

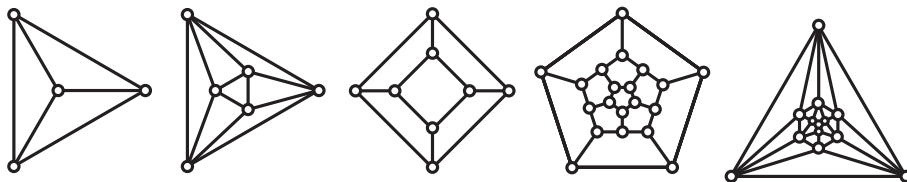


FIGURA 1: Els grafs dels cinc sòlids platònics.

on  $\delta(u)$  és el nombre de vèrtexs adjacents al vèrtex  $u$ , normalment anomenat *grau* o *valència*. Malgrat que aquest resultat de paritat és aparentment trivial, té alguns corol·laris interessants, com els següents:

- (a) *Tot graf té un nombre parell de vèrtexs amb grau senar.*

Aquest és l'anomenat lema de les encaixades de mans, perquè es pot enunciar de la manera següent: *En una festa, el nombre de persones que encaixen un nombre senar de mans és sempre parell.*

- (b) *Tot graf  $\delta$ -regular (és a dir, que tots els seus vèrtexs tenen grau  $\delta$ ), amb  $\delta$  senar, té un nombre parell de vèrtexs.*

- (c) *En un graf planar amb coll  $g$  (és a dir, que la longitud del cicle més curt és  $g$ ) i nombre d'arestes  $|E|$  es compleix que*

$$|E| \leq \frac{g(|V| - 2)}{g - 2}. \quad (2)$$

Per demostrar (c) necessitem la famosa fórmula d'Euler [10] publicada entre 1752 i 1753, però que va ser observada per Descartes el 1640, la qual afirma que en un graf planar amb  $n = |V|$  vèrtexs,  $m = |E|$  arestes i  $r = |R|$  regions, es compleix que

$$r + n = m + 2. \quad (3)$$

En aquesta fórmula, el nombre de regions inclou la regió exterior (és a dir, el 'mar', si tenim un mapa o si el graf està sobre una esfera). Per exemple, els grafs dels sòlids platònics, il·lustrats a la figura 1, compleixen la fórmula d'Euler. De fet, aquesta fórmula dona condicions necessàries per a l'existència d'aquests políedres regulars (vegeu Rademacher i Toeplitz [29]). En el nostre cas, la demostració es com segueix: com que cada aresta és la frontera de dues regions i cada regió té almenys  $g$  arestes, s'ha de complir que  $r \leq 2m/g$ . Utilitzant aquesta desigualtat i l'equació (3), obtenim (2).

Tornant a la fórmula d'Euler, es pot interpretar el nombre  $r$  de regions com la cardinalitat del conjunt de vèrtexs  $V^*$  del graf dual  $G^*$ . Donat un graf planar  $G$  amb  $|V|$  vèrtexs i  $|E|$  arestes formant regions, el seu graf dual  $G^*$  té vèrtexs que representen les regions de  $G$  i hi ha una aresta entre dos vèrtexs si les corresponents regions de  $G$  són veïnes.

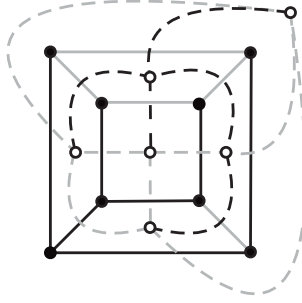


FIGURA 2: L'arbre generador (arestes negres) del graf d'un cub (arestes contínues i vèrtexs negres) i el seu dual (arestes discontinúes i vèrtexs blancs).

Aquesta interpretació dóna una fórmula més simètrica:

$$(|V^*| - 1) + (|V| - 1) = |E|, \quad (4)$$

la qual es pot demostrar sense utilitzar inducció, identificant els dos parèntesis de l'equació (4) com el nombre d'arestes de dos arbres generadors  $T^*$  i  $T$  de  $G^*$  i  $G$ , respectivament (un arbre generador d'un graf està format per tots els vèrtexs del graf i totes les arestes possible sense que es formin cicles). Això està representat a la figura 2, on les arestes negres i contínues de  $G$  (el graf d'un cub) pertanyen a  $T$ , mentre que les arestes negres discontinúes de  $G$  corresponen a les arestes de  $T^*$  en  $G^*$  (el graf d'un octàedre). Per a més detalls, vegeu Aigner i Ziegler [1].

Com un cas particular del corollari (c), tenim el resultat següent:

*En un graf planar el nombre d'arestes satisfà  $m \leq 3n - 6$  i, si no conté triangles, aleshores satisfà  $m \leq 2n - 4$ .*

De la primera desigualtat, podem veure que el graf complet  $K_5$  ( $n = 5, m = 10$ ) no és planar. De forma similar en la segona desigualtat, veiem que passa el mateix per al graf bipartit complet  $K_{3,3}$  ( $n = 6, m = 9$ ). Vegeu tots dos grafs a la figura 3. A més, de l'equació (1) i de la primera desigualtat, podem demostrar que qualsevol graf planar conté un vèrtex  $u$  de grau  $\delta(u) \leq 5$ . De fet, si  $n_i$  denota el nombre de vèrtexs de grau  $i \in \mathbb{N}$ , aleshores de l'equació (1) tenim que

$$2m = n_1 + 2n_2 + 3n_3 + \dots \leq 2(3n - 6) = 6n_1 + 6n_2 + 6n_3 + \dots - 12,$$

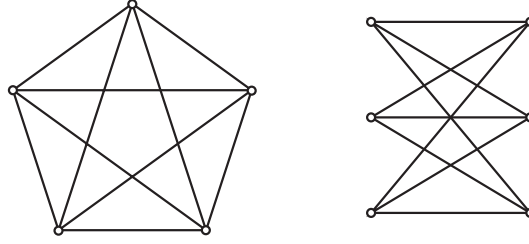
d'on

$$5n_1 + 4n_2 + 3n_3 + 2n_4 + n_5 - n_7 - 2n_8 - \dots = 12,$$

de manera que  $n_i \geq 0$  per a algun  $i \leq 5$ , com afirmàvem.

Aquest darrer resultat ens permet demostrar, per inducció, el teorema dels cinc colors (T5C), el qual va ser demostrat per primera vegada per Heawood [24]:

*Cinc colors són suficients per a una vèrtex-coloració d'un graf planar.*

FIGURA 3: El graf complet  $K_5$  i el graf bipartit complet  $K_{3,3}$ .

Recordem que, en una vèrtex-coloració, els vèrtexs adjacents tenen colors diferents.

Els resultat de 'paritat' són també importants en altres àrees de la teoria de grafos. Considerem ara el problema d'haver d'acolorir amb tres colors les arestes d'un graf  $G$  amb grau màxim 3. Això es coneix com a *aresta-coloració lliure* de  $G$ . En particular, l'*aresta-coloració* d'un graf cúbic (o 3-regular), també anomenada *Tait-coloració*, correspon al cas en el qual arestes adjacents reben colors diferents. Com veurem després, si  $G$  és un graf planar, el problema de l'existència de Tait-coloracions està relacionada amb el teorema de quatre colors (T4C). A més, veurem que la construcció de grafos cúbics que no poden ser Tait-acolorits porta a l'àlgebra booleana, la qual s'utilitza normalment per estudiar circuits lògics. Per això, introduïm una generalització natural del concepte de 'color', la qual descriu de manera simple la coloració ("0" o "1") de qualsevol conjunt d'arestes o, de manera més abstracta, de qualsevol família  $\mathcal{F}$  de colors escollits entre tres colors diferents, diguem-ne  $\mathcal{C} = \{1, 2, 3\}$ . Parlant amb més precisió, suposem que  $\mathcal{F}$  està formada per  $m_i$  colors,  $i \in \mathcal{C}$ , els quals es poden representar pel vector de coloracions  $\mathbf{m} = (m_1, m_2, m_3)$ . Aleshores, diem que  $\mathcal{F}$  té una *Boole-coloració*  $\mathbf{0}$ , denotada per  $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{0}$ , si

$$m_1 \equiv m_2 \equiv m_3 \equiv m \pmod{2}$$

i diem que  $\mathcal{F}$  té una *Boole-coloració*  $\mathbf{1}$  (o, més concretament,  $\mathbf{1}_a$ ), denotada per  $\Psi(\mathcal{F}) = \mathbf{1}(\mathbf{1}_a)$ , si

$$m_a + 1 \equiv m_b \equiv m_c \equiv m + 1 \pmod{2},$$

on  $a, b, c$  denoten els colors 1, 2, 3 en qualsevol ordre.

D'acord amb aquestes definicions, la Boole-coloració d'una aresta  $e \in E$  amb color  $a \in \mathcal{C}$  és  $\Psi(e) = \Psi(\{a\}) = \mathbf{1}_a$  i la Boole-coloració d'un vèrtex  $v \in V$ , denotat per  $\Psi(v)$ , es defineix com la Boole-coloració de les seves arestes incidents, les quals poden tenir colors diferents o iguals. En aquest context, cal assenyalar els fets següents:

- Si  $\delta(v) = 1$ , aleshores  $\Psi(v) = \mathbf{1}_a$  si i només si l'aresta incident al vèrtex  $v$  té color  $a \in \mathcal{C}$ .
- Si  $\delta(v) = 2$ , aleshores  $\Psi(v) = \mathbf{0}$  si i només si les dues arestes incidents al vèrtex  $v$  tenen el mateix color i  $\Psi(v) = \mathbf{1}$  si tenen colors diferents.

+	<b>0</b>	<b>1<sub>a</sub></b>	<b>1<sub>b</sub></b>	<b>1<sub>c</sub></b>
<b>0</b>	<b>0</b>	<b>1<sub>a</sub></b>	<b>1<sub>b</sub></b>	<b>1<sub>c</sub></b>
<b>1<sub>a</sub></b>	<b>1<sub>a</sub></b>	<b>0</b>	<b>1<sub>c</sub></b>	<b>1<sub>b</sub></b>
<b>1<sub>b</sub></b>	<b>1<sub>b</sub></b>	<b>1<sub>c</sub></b>	<b>0</b>	<b>1<sub>a</sub></b>
<b>1<sub>c</sub></b>	<b>1<sub>c</sub></b>	<b>1<sub>b</sub></b>	<b>1<sub>a</sub></b>	<b>0</b>

TAULA 1: El grup de Klein de les Boole-coloracions.

- Si  $\delta(v) = 3$ , aleshores  $\Psi(v) = \mathbf{0}$  si i només si les tres arestes incidents al vèrtex  $v$  tenen tres colors diferents. Per tant, en una Tait-coloració d'un graf cúbic, tots els seus vèrtexs tenen Boole-coloració  $\mathbf{0}$ .

A més, es pot definir una operació suma de manera natural en el conjunt  $\mathcal{B} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3\}$  de Boole-coloracions de la manera següent: donades les coloracions  $X_1, X_2$  representades respectivament pels vectors de coloracions  $\mathbf{m}_1 = (m_{11}, m_{12}, m_{13})$  i  $\mathbf{m}_2 = (m_{21}, m_{22}, m_{23})$ , definim la suma  $X = X_1 + X_2$  com la coloració representada pel vector de coloracions  $\mathbf{m} = \mathbf{m}_1 + \mathbf{m}_2$ . D'aquesta manera,  $(\mathcal{B}, +)$  és isomorf al grup de Klein, amb  $\mathbf{0}$  com a identitat,  $\mathbf{1}_a + \mathbf{1}_a = \mathbf{0}$ , i  $\mathbf{1}_a + \mathbf{1}_b = \mathbf{1}_c$ ; vegeu la taula 1.

Observem que, com que cada element coincideix amb el seu invers,  $m\mathbf{1}_i = \mathbf{1}_i + \mathbf{1}_i + \dots + \mathbf{1}_i$  és igual a  $\mathbf{0}$  si  $m$  és parell i igual a  $\mathbf{1}_i$  si  $m$  és senar. D'aquest simple fet, podem deduir el resultat següent, el qual és molt útil per al desenvolupament posterior de la teoria i que pot ser vist com una generalització de l'anomenat lema de paritat (vegeu Isaacs [25]):

*Segui  $G$  un graf amb grau màxim 3 que tingui una aresta-coloració lliure, tal que  $n_i$  vèrtexs tinguin una Boole-coloració  $\mathbf{1}_i$ , per a  $i \in \mathcal{C}$ . Aleshores,*

$$n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \equiv m \pmod{2},$$

$$\text{on } m = n_1 + n_2 + n_3.$$

En efecte, com que la Boole-coloració de cada vèrtex és la suma de les Boole-coloracions de les seves arestes incidents i amb l'equació (1), podem escriure

$$\sum_{v \in V} \Psi(v) = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{1}_i + (n - m) \mathbf{0} = \sum_{i=1}^3 n_i \mathbf{1}_i = \sum_{e \in E} 2\Psi(e) = \mathbf{0},$$

però aquesta igualtat només es compleix si  $n_i \mathbf{1}_i = \mathbf{0}$  o  $n_i \mathbf{1}_i = \mathbf{1}_i$ , per a tot  $i \in \mathcal{C}$ . Aleshores, a partir de  $n_1 + n_2 + n_3 = m$ , aconseguim el resultat esperat.

Notem que, com a conseqüència directa, també arribem al següent resultat:

*No hi ha cap aresta-coloració d'un graf  $G$  que tingui un sol vèrtex amb Boole-coloració  $\mathbf{1}$  (i els altres vèrtexs amb Boole-coloració  $\mathbf{0}$ ).*

Una altra conseqüència interessant és el resultat següent de Tait [31]:

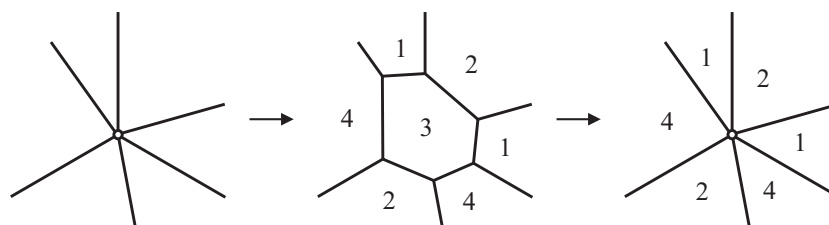


FIGURA 4: Un exemple del fet que tot mapa té un 3-graf associat.

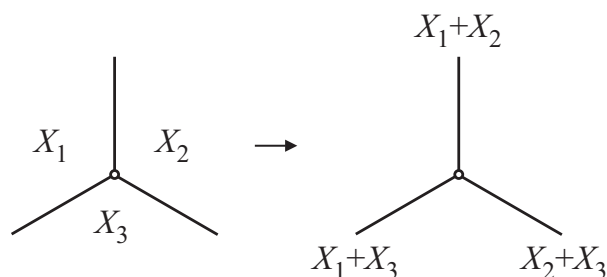


FIGURA 5: Obtenció d'una Tait-coloració d'un 3-graf.

*Un graf planar cúbic és Tait-acolorible si i només si el seu mapa corresponent és 4-acolorible.*

Emprant les Boole-coloracions, la demostració és com segueix. Primer, observem que tot mapa té un 3-graf associat: si hi ha un vèrtex amb grau més gran que 3, es pot substituir per un polígon, de manera que el mapa obtingut es pot acolorir amb 4 colors i, per tant, el mapa original també és 4-acolorible, vegeu-ne un exemple a la figura 4. Ara suposem que tenim les regions d'un mapa amb les coloracions  $\mathbf{0}, \mathbf{1}_1, \mathbf{1}_2, \mathbf{1}_3$ . Aleshores, per obtenir una Tait-coloració d'un graf planar cúbic només ens cal assignar a cada aresta la suma de les coloracions de les dues regions separades per aquesta aresta. Per veure que això dona una Tait-coloració, només hem d'estudiar un vèrtex, com es mostra a la figura 5. Com que tenim un mapa 4-acolorit, cada dues regions veïnes tenen colors diferents. Per tant, cap de les sumes pot donar  $\mathbf{0}$ . A més, com que les tres regions amb un vèrtex comú tenen coloracions diferents  $X_1, X_2$  i  $X_3$  i  $(\mathcal{B}, +)$  és un grup, les coloracions  $X_1 + X_2, X_1 + X_3$  i  $X_2 + X_3$  també han de ser diferents.

A la figura 6 hi ha un exemple d'una 4-coloració d'un mapa i la seva Tait-coloració (obtinguda a partir de la taula 1), on les coloracions  $\mathbf{0}, \mathbf{1}_a, \mathbf{1}_b$  i  $\mathbf{1}_c$  es denoten per 0, 1, 2 i 3, respectivament. Al revés, si volem obtenir un mapa 4-acolorit d'una Tait-coloració de les arestes del graf corresponent, comencem donant la coloració  $\mathbf{0}$  a una regió qualsevol que considerarem inicial. Aleshores, des

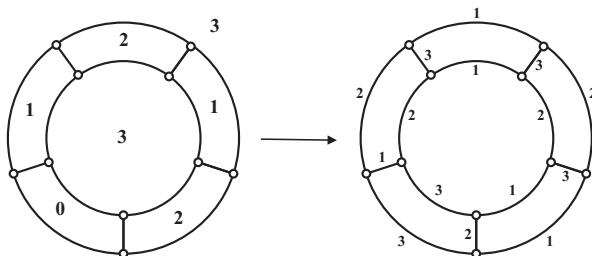


FIGURA 6: La 4-coloració d'un mapa i la Tait-coloració de les seves arestes.

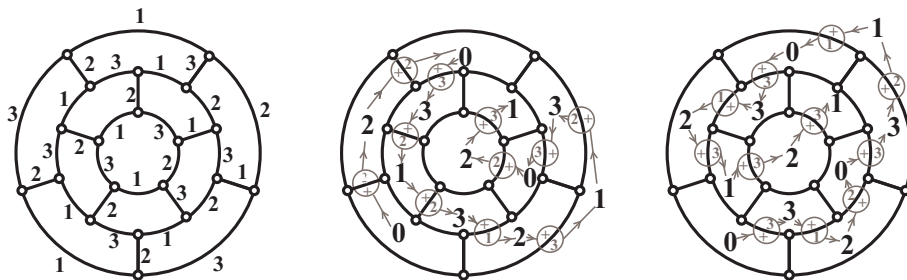


FIGURA 7: Una aresta-coloració del graf del dodecàedre (també representat a la figura 1) i dos camins amb les mateixes regions inicial i final.

d'aquí, seguim un camí arbitrari a través de totes les regions travessant algunes arestes. A cada nova regió del nostre camí, li donem la coloració obtinguda al sumar la coloració de la regió 'anterior' més la coloració de l'aresta que acabem de travessar. Com que cap aresta té la coloració  $0$ , és obvi que la coloració obtinguda per a cada regió és diferent de la de la seva regió 'anterior' en el camí; vegeu un exemple d'aquest procés a la figura 7 (esquerra i centre). Ara, per acabar la demostració, hem de veure que la coloració d'una regió és independent del camí seguit per arribar-hi. Amb aquesta idea, siguin  $p_1$  i  $p_2$  dos camins amb les mateixes regions inicial i final. Volem demostrar que la coloració obtinguda a la regió final és la mateixa seguint els dos camins, hi ha un exemple d'aquest fet a la figura 7 (centre i dreta). Aleshores, les coloracions  $X, Y$  obtingudes amb els dos camins són iguals si, i només si, la suma de les coloracions de totes les arestes creuades per  $p_1$  i  $p_2$  és  $0$ . En efecte, siguin  $X_1, X_2, \dots, X_n$  i  $Y_1, Y_2, \dots, Y_m$  les coloracions de les arestes creuades respectivament per  $p_1$  i  $p_2$ ; aleshores  $X_1 + X_2 + \dots + X_n = X$  i  $Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m = Y$ . Si  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m) = 0$ , les sumes en tots dos parèntesis són iguals i, per tant,  $X = Y$ . Per demostrar aquesta igualtat, podem suposar que  $p_1 + p_2$  és una corba simple (vegeu la figura 8), perquè si tingués punts dobles podríem descompondre-la en corbes simples.



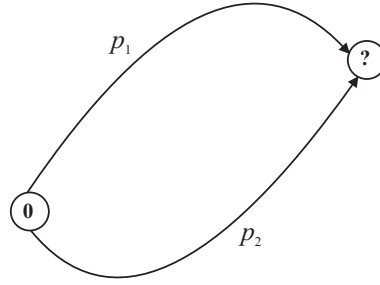


FIGURA 8: Dos camins des d'una regió 0 a una altra amb un color desconegut.

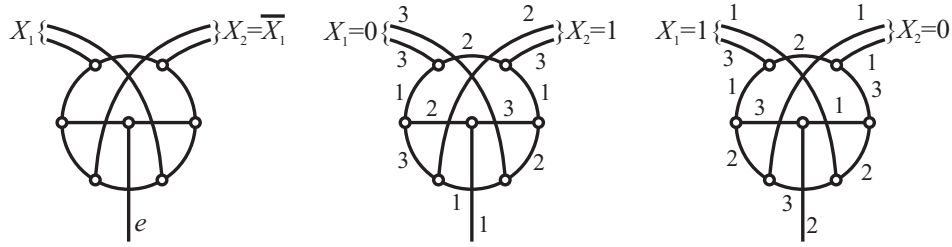
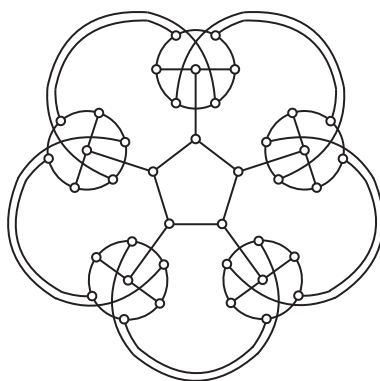


FIGURA 9: Multipols.

Si imaginem que tallem el graf amb aquesta corba, obtindrem dos grafs, de manera que les coloracions de les arestes creuades per la corba han de complir que  $n_1 \equiv n_2 \equiv n_3 \pmod{2}$ , on  $n_i$  és el nombre d'arestes creuades amb coloració  $\mathbf{1}_i$ . Aleshores,  $(X_1 + X_2 + \dots + X_n) + (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_m) = n_1 \mathbf{1}_1 + n_2 \mathbf{1}_2 + n_3 \mathbf{1}_3 = \mathbf{0}$ , com afirmàvem.

Com hem dit abans, aquest tipus de coloracions ens permet utilitzar l'àlgebra booleana per construir i caracteritzar *snarks*, és a dir, grafs cúbics que no són Tait-acoloribles, també anomenats de *classe dos*. L'exemple més senzill d'*snark* és el graf de Petersen (vegeu la figura 12). Amb el mètode que hem explicat podem obtenir famílies infinites d'*snarks*. Un exemple és la família obtinguda unint adequadament un nombre senar de còpies del *multipol* (graf cúbic amb arestes i semiarestes o *dangling edges*) que es mostra a la figura 9(esquerra).

Aquesta estructura funciona com si fos una porta NOD de circuits lògics en el sentit que, una vegada que Tait-acolorim les seves arestes i semiarestes, les coloracions  $X_1$  i  $X_2$  són una la conjugada de l'altra, és a dir,  $X_2 = \mathbf{0}$  (respectivament,  $X_2 = \mathbf{1}$ ) si i només si  $X_1 = \mathbf{1}$  (respectivament,  $X_1 = \mathbf{0}$ ). Això es compleix sigui quin sigui el color de la semiaresta  $e$ . Dos exemples d'aquest fet es mostren a la figura 9(centre i dreta). Si, com hem esmentat, unim en un cercle tancat un nombre senar d'aquests multipols, afegint vèrtexs addicionals per connectar entre si les semiarestes  $e$ , qualsevol intent de Tait-acolorir el graf produirà un conflicte i,

FIGURA 10: *Flower snark*.

per tant, el graf és un *snark*. Un exemple concret amb cinc multipols es troba a la figura 10.

Aquesta família d'*snarks*, anomenada en anglès *flower snark*, va ser proposada per Loupekhine (vegeu Isaacs [26]). Les primeres famílies infinites d'*snarks* van ser proposades per Isaacs [25], però també es poden obtenir utilitzant les Boole-coloracions. Es poden trobar més detalls d'aquesta tècnica a Fiol [12].

### 3 Coneguts i desconeguts: la teoria de Ramsey

Considerem el resultat següent:

*En una festa amb sis persones o més, sempre hi ha tres persones que són mútuament conegudes o desconegudes entre elles.*

En altres paraules, si acolorim amb dos colors les arestes del graf complet  $K_n$  amb  $n \geq 6$  (és a dir, assignem un dels dos colors a cada aresta), aleshores sempre conté un triangle monocromàtic, o sigui, un subgraf  $K_3$  amb les seves tres arestes del mateix color. Això es pot demostrar fàcilment, malgrat que demostrar resultats similars amb més colors i/o imposant altres subgrafs monocromàtics pot ser molt difícil. Recordem que, donats  $m$  grafs  $G_1, G_2, \dots, G_m$ , el *nombre de Ramsey*  $R(G_1, G_2, \dots, G_m)$  es defineix com el nombre  $n$  més petit, tal que en qualsevol aresta-coloració de  $K_n$  amb  $m$  colors, sempre existeix algun subgraf monocromàtic isomorf a algun  $G_i$ . Si  $G_i$  és un graf complet  $K_r$ , el nombre de Ramsey s'escriu, per simplicitat, substituïnt  $K_r$  per  $r$ . Alguns exemples coneguts amb valors exactes (=) i fites ( $\leq$ ) de nombres de Ramsey són els següents:

$$R(3, 3) = 6, \quad R(3, 4) = 9, \quad R(3, 5) = 14, \quad R(3, 6) = 18, \quad R(4, 4) = 18, \quad R(4, 5) = 25, \\ 43 \leq R(5, 5) \leq 49; \quad R(3, 3, 3) = 17; \quad 51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 62.$$

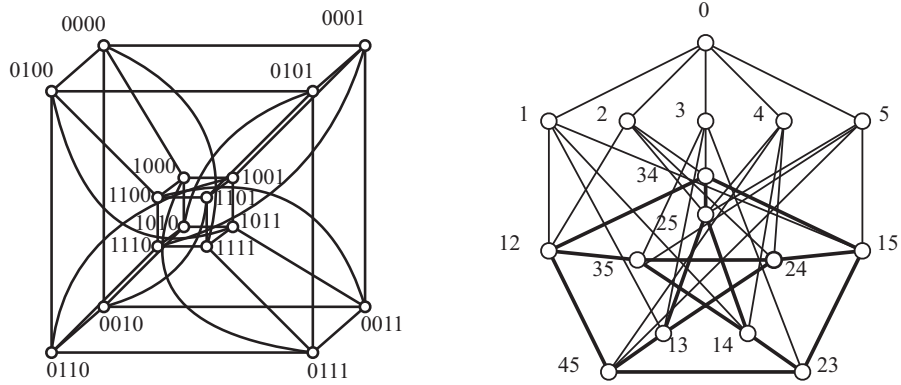
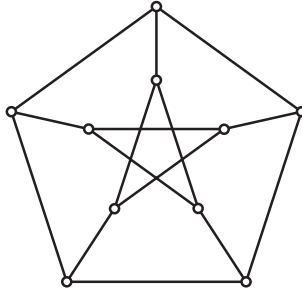


FIGURA 11: El graf de Clebsch en dues perspectives diferents.

Així, el resultat amb el qual hem començat aquesta secció es pot expressar com  $R(3, 3) \leq 6$ . Com que es pot demostrar que, a més, es compleix que  $R(3, 3) \geq 6$  (resulta fàcil acolorir amb dos colors les arestes del graf complet  $K_5$  de manera que no hi hagi triangles monocromàtics), aleshores arribem a  $R(3, 3) = 6$ . Per a un bon resum actualitzat d'aquest tema, vegeu l'article de Radziszowski [30].

Com a exemple, demostrarem que  $R(3, 3, 3) = 17$ . Primer veurem que  $R(3, 3, 3) \leq 17$ . Fem una aresta-coloració d'un graf complet amb tres colors; diguem-ne blau, vermell i verd. Suposem que l'aresta-coloració no té triangles monocromàtics. Els veïnatge verd d'un vèrtex  $v$  és el conjunt de vèrtexs que tenen una aresta verda que els uneix a  $v$ . El veïnatge verd de  $v$  no pot contenir cap aresta verda per evitar triangles monocromàtics. Aleshores, l'aresta-coloració del veïnatge verd de  $v$  només té dos colors: blau i vermell. Com que  $R(3, 3) = 6$ , el veïnatge verd de  $v$  pot tenir com a màxim 5 vèrtexs. Amb el mateix raonament, els veïnatges blau i vermell de  $v$  poden tenir com a màxim 5 vèrtexs cadascun. Com que qualsevol vèrtex diferent de  $v$  està en el veïnatge verd, blau o vermell de  $v$ , aleshores el graf complet pot tenir com a màxim  $1 + 5 + 5 + 5 = 16$  vèrtexs. Per tant,  $R(3, 3, 3) \leq 17$ .

Ara, per demostrar que  $R(3, 3, 3) \geq 17$ , utilitzarem la teoria algebraica de grafs, la qual es basa en les propietats dels valors propis i vectors propis de la matriu d'adjacència. Si  $R(3, 3, 3) \geq 17$ , aleshores podem acolorir les arestes del graf complet  $K_{16}$  amb tres colors, és a dir, farem una aresta-coloració de  $K_{16}$  amb 3 colors sense cap triangle monocromàtic. L'aresta-coloració demanada és equivalent a descompondre  $K_{16}$  en tres grafs  $G_1$ ,  $G_2$  i  $G_3$ , cadascun amb un color. Això implica que cada  $G_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , ha de ser un graf amb 16 vèrtexs, regular de grau 5 i sense triangles. Com que hi ha 20 camins de longitud 2 des de cada vèrtex, la primera possibilitat que ens ve al cap és considerar un graf en el que dos vèrtexs no-adjacents qualssevol tenen 2 veïns comuns. En altres paraules, un graf fortament regular amb 0 veïns comuns de vèrtexs adjacents i 2 veïns comuns de vèrtexs no-adjacents.

FIGURA 12: El graf de Petersen  $P$ .

Hi ha només un graf amb aquestes característiques, el graf de Clebsch, el qual es mostra en dues perspectives diferents a la figura 11. A l'esquerra, hi ha el graf de Clebsch amb els vèrtexs etiquetats amb els nombres del 0 al 15 en base 2, on dos vèrtexs són adjacents quan les etiquetes corresponents difereixen en un o tots quatre dígit. A la dreta, hi ha el graf de Clebsch vist com el graf amb vèrtexs etiquetats  $0, i$  i els parells no-ordenats  $ij$ , amb  $i, j \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ , per a  $i \neq j$ . En aquesta representació, les adjacències ara són  $0 \sim i$ ,  $ij \sim i$ ,  $ij \sim j$  i  $ij \sim kl$  si  $i, j, k, l$  són tots diferents i  $i, j, k, l \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ . De fet, el graf de Clebsch és vèrtex-transitiu (és a dir, veiem el mateix graf des de qualsevol vèrtex), de manera que qualsevol vèrtex pot ser escollit com a vèrtex 0. Observem que, en aquesta perspectiva del graf de Clebsch, és evident que el subgraf induït pels deu vèrtexs a distància 2 (de qualsevol vèrtex donat del graf de Clebsch) és el graf de Petersen  $P$  [28]; compareu les figures 11 (a la dreta) i 12.

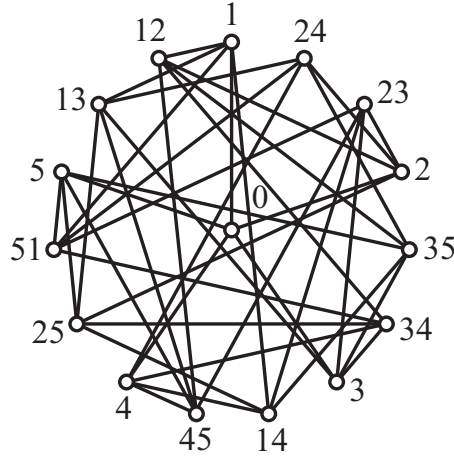
Aleshores, el nostre problema és trobar tres còpies aresta-disjunctes del graf de Clebsch en  $K_{16}$ . Per això, presentem la terminologia següent: sigui  $G_i = (V, E_i)$  una família de grafs amb el mateix conjunt de vèrtexs  $V$  i tal que  $E_i \cap E_j = \emptyset$ , per a  $i, j = 1, 2, \dots, m$ . Definim el graf  $G = \bigcup_{i=1}^m G_i$  com el graf  $G = (V, E)$ , on  $E = \bigcup_{i=1}^m E_i$ . Notem que la matriu d'adjacència (matriu amb files i columnes etiquetades pels vèrtexs del graf, amb un 1 o un 0 a cada component segons si els vèrtexs corresponents són adjacents o no) satisfà  $\mathbf{A}(G) = \sum_{i=1}^m \mathbf{A}(G_i)$ .

Si denotem amb  $Cl_i$  un graf isomorf al graf de Clebsch, el nostre problema ara és el següent:  $K_{16} = Cl_1 \cup Cl_2 \cup Cl_3$ ? En termes de les seves matrius d'adjacències  $\mathbf{A}_i = \mathbf{A}(Cl_i)$ , tenim

$$\mathbf{A}_1 + \mathbf{A}_2 + \mathbf{A}_3 = \mathbf{J} - \mathbf{I}, \quad (5)$$

ja que la matriu d'adjacència de  $K_{16}$  és  $\mathbf{J} - \mathbf{I}$ , on  $\mathbf{J}$  és la matriu en la que totes les components són 1 i  $\mathbf{I}$  és la matriu identitat.

Ara utilitzem tècniques espectrals per tractar l'equació (5). Recordem que l'espectre d'una matriu d'adjacència dona els valors propis d'aquesta matriu (valors reals, ja que la matriu és simètrica) i que cada valor propi té associat almenys un vector propi. Ara ens cal saber quins són els espectres del graf de Clebsch i de la matriu  $\mathbf{J} - \mathbf{I}$ . Podem calcular-los o mirar-los en algun llibre de referència, com el

FIGURA 13:  $K_{16}/3 = \text{graf de Clebsch}$ .

de Godsil i Royle [22]. Aleshores, tenim que  $\text{sp } \mathbf{A}_i = \{5^1, 1^{10}, -3^5\}$  i  $\text{sp}(\mathbf{J} - \mathbf{I}) = \{15^1, -1^{15}\}$ , on els superíndexs indiquen la multiplicitat de cada valor propi. En els dos casos, el valor propi més gran té associat el vector propi  $\mathbf{j}$  (amb totes les components iguals a 1), cosa que implica que els vectors propis dels altres valors propis estan en el subespai  $H = \mathbf{j}^\perp$ . Considerem ara  $F = \ker(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I}) \cap \ker(\mathbf{A}_2 - \mathbf{I}) \subset H$ . Com que  $\dim(\ker(\mathbf{A}_1 - \mathbf{I})) = \dim(\ker(\mathbf{A}_2 - \mathbf{I})) = 10$  i  $\dim H = 15$ , es compleix que  $\dim F \geq 5$ . De l'equació (5), amb  $\mathbf{A}_1 \mathbf{v} = \mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}_2 \mathbf{v} = \mathbf{v}$  i  $(\mathbf{J} - \mathbf{I}) \mathbf{v} = -\mathbf{v}$ , on  $\mathbf{v} \in F$ , obtenim que  $\mathbf{A}_3 \mathbf{v} = -3\mathbf{v}$ , de manera que  $\dim F = 5$  i  $F = \ker(\mathbf{A}_3 + 3\mathbf{I})$ . Això implica que

$$H = F_1 \cup F_2 \cup F_3,$$

on  $\dim F_i = 5$  i, per a tot  $\mathbf{v} \in F_i$ ,  $\mathbf{A}_i(\mathbf{v}) = -3\mathbf{v}$ ,  $\mathbf{A}_j(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$ , per a  $i, j = 1, 2, 3$  i  $j \neq i$ .

Això ens indica que pot existir la descomposició demanada de  $K_{16}$ . Una de les dues possibles construccions s'il·lustra a la figura 13, la qual mostra com acolorir un terç de les arestes de  $K_{16}$  amb un color utilitzant el graf de Clebsch. Fent una rotació d'aquest graf corresponent als angles  $\frac{2\pi}{15}$  i  $\frac{4\pi}{15}$ , obtenim les arestes que han de ser acolorides amb els altres dos colors; amb això aconseguim  $R(3, 3, 3) = 17$ .

En el cas de voler evitar triangles monocromàtics tenint més de tres colors, només es coneixen fites. Per definició, sigui  $C(m) := R(3, 3, \dots, 3) - 1$  per a  $m \geq 1$ , és a dir,  $C(m)$  és l'enter més gran  $n$  tal que  $K_n$  pugui ser acolorit amb  $m$  colors sense triangles monocromàtics. La següent fita superior és coneguda:

$$C(m) \leq \lfloor m! e \rfloor,$$

vegeu Fiol, Garriga i Yebra [18]. Fixem-nos que, de manera sorprenent, apareix el nombre  $e$ . La demostració és com segueix: òbviament,  $C(1) = R(3) - 1 = 2$  i sabem

que  $C(2) = R(3, 3) - 1 = 5$  i  $C(3) = R(3, 3, 3) - 1 = 16$ . Si calculem  $C(3)$  a partir de  $C(2)$ , considerant que un vèrtex  $v$  és adjacent a  $6 + 5 + 5$  vèrtexs, obtenim que  $C(3) \leq 3C(2) + 1 = 16$ . Per inducció, tenim la recurrència

$$C(m+1) \leq (m+1)C(m) + 1 \quad (m \geq 1).$$

Resolem l'equació lineal corresponent

$$D(m+1) = (m+1)D(m) + 1,$$

resolent primer la seva equació homogènia:

$$D(m+1) = (m+1)D(m) \Rightarrow D(m) = K m!,$$

on  $K$  és una constant, i aleshores busquem una solució particular  $D(m) = K(m)m!$  de l'equació completa:

$$\begin{aligned} K(m+1)(m+1)! &= (m+1)K(m)m! + 1 \Rightarrow K(m+1) - K(m) = \frac{1}{(m+1)!} \\ \Rightarrow K(m) &= \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} + \alpha \Rightarrow D(m) = m! \left( \sum_{r=1}^m \frac{1}{r!} + \alpha \right), \end{aligned}$$

on  $\alpha$  és una constant. Finalment,  $C(1) = D(1) = 2$  dóna  $\alpha = 1$ , de manera que  $C(m) \leq \lfloor m!e \rfloor$ .

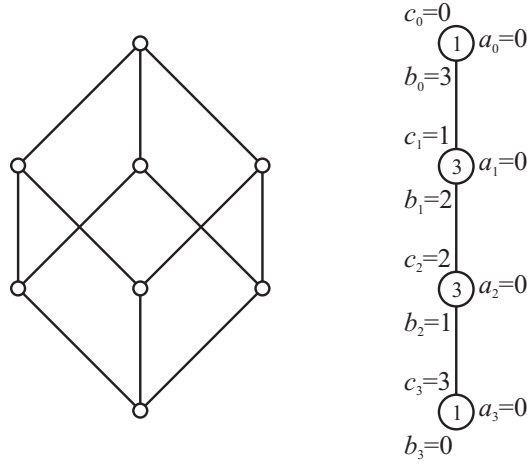
En els exemples que hem esmentat al començament d'aquesta secció, hem vist que  $51 \leq R(3, 3, 3, 3) \leq 62$ . Amb la fita proposada, obtenim que  $C(4) \leq \lfloor 4!e \rfloor = 65$ , cosa que representa una bona fita superior, no molt distant de la fita coneguda.

## 4 Amics en comú: distància-regularitat i teoria de codis

Com diuen Aigner i Ziegler en el seu llibre [1], ningú sap qui va ser el primer en donar el resultat següent amb un toc humà:

*Si en una festa amb tres persones o més, cada dues tenen exactament un amic en comú, aleshores hi ha almenys una persona (el 'polític') que és amiga de tothom.*

Actualment, aquest resultat es coneix amb el nom de teorema de l'amistat. Com s'ha dit en la introducció, el 1966 Erdős, Rényi i Sós [8] van donar la primera demostració (per reducció a l'absurd) i es considera la més famosa. Bàsicament, té dues parts: primer es demostra que si el graf  $G$ , que modelitza aquesta festa on cada aresta representa l'amistat o coneixença entre dues persones, és un contraexemple amb més de tres vèrtexs, aleshores ha de ser regular, diguem-ne de grau  $k$ . Com a conseqüència,  $G$  ha de ser *fortament regular* amb paràmetres  $(n, k; 1, 1)$ , és a dir, cada dos vèrtexs adjacents tenen exactament un veí comú i el mateix passa per a cada dos vèrtexs no-adjacents. Després, utilitzem de nou la teoria espectral de grafs per demostrar que  $G$  no pot existir. De fet, l'hipotètic graf  $G$  seria un exemple

FIGURA 14: Una partició en capes del graf del cub  $Q$  i el seu diagrama d'intersecció.

de graf distància-regular, en aquest cas amb diàmetre dos. Diem que un graf és *distància-regular* si, quan és observat o 'penjat' d'un dels seus vèrtexs, obtenim una partició del conjunt de vèrtexs en capes, on la capa  $i$  conté els vèrtexs a distància  $i$  d'un vèrtex donat i els vèrtexs en una capa són indistingibles respecte de les seves adjacències. Una definició més precisa és la següent: un graf  $G$  amb diàmetre  $D$  és distància-regular si, per a cada parell de vèrtexs  $(u, v)$  i enters  $0 \leq i, j \leq D$ , el nombre  $p_{ij}(u, v)$  de vèrtexs a distància  $i$  del vèrtex  $u$  i a distància  $j$  del vèrtex  $v$  només depèn de  $k := \text{dist}(u, v)$ , aleshores escrivim  $p_{ij}(u, v) = p_{ij}^k$  per a unes constants  $p_{ij}^k$  anomenades *nombres d'intersecció*. De fet, degut a que es compleixen moltes relacions entre aquests nombres, és possible donar una definició molt més senzilla, perquè per a cada distància  $k$  només ens calen els parells de distàncies  $(i, j) = (k-1, 1)$ ,  $(k, 1)$  i  $(k+1, 1)$ . Els nombres d'intersecció corresponents són suficients per determinar tots els altres, vegeu, per exemple Biggs [3]. Aleshores, la definició més usual de distància-regularitat és: un graf  $G$  és distància-regular si, per a cada parell de vèrtexs  $u, v$  a distància  $\text{dist}(u, v) = k$ , els nombres  $c_k$ ,  $a_k$  i  $b_k$  de vèrtexs adjacents a  $v$  i a distància  $k-1$ ,  $k$  i  $k+1$ , respectivament, del vèrtex  $u$  només depèn de  $k$ , de manera que  $c_k = p_{k-1,1}^k$ ,  $a_k = p_{k,1}^k$  i  $b_k = p_{k+1,1}^k$ . Com a exemples simples de grafs distància-regulats, tenim els 1-esquelets dels políedres regulars; vegeu de nou la figura 1. A la figura 14, il·lustrem el cas de la partició en capes del graf del cub juntament amb l'anomenat *diagrama d'intersecció* dels corresponents nombres d'intersecció. Noteu que cada capa es representa per un cercle amb el nombre de vèrtexs que conté.

Des de la seva definició feta per Biggs al començament dels anys 70, els grafs distància-regulats, i la seva principal generalització anomenada *esquemes d'associació* (vegeu Brouwer i Haemers [7]), han estat conceptes claus en combinatòria

algebraica. Aquests grafs tenen relació amb altres àrees de la matemàtica, com la geometria, la teoria de codis, la teoria de grups, la teoria del disseny i altres parts de la teoria de grafs. Com van assenyalar Brouwer, Cohen i Neumaier en el seu llibre sobre aquest tema [6], això és degut a que la majoria d'objectes finits amb 'prou' regularitat estan relacionats amb els grafs distància-regulars.

Una caracterització quasi-espectral d'aquests grafs feta per Fiol i Garriga [16, 14] és la següent:

*Un graf regular  $G$  amb matriu d'adjacència  $\mathbf{A}$  i  $d + 1$  valors propis diferents és distància-regular si i només si el nombre  $|\Gamma_d(u)|$  de vèrtexs a distància  $d$  del vèrtex  $u$  és una constant i només depèn de l'espectre de la matriu  $\mathbf{A}$ .*

Més concretament, considerem un graf regular  $G$  amb  $n$  vèrtexs i espectre  $\text{sp } G = \{\lambda_0^1, \lambda_1^{m_1}, \dots, \lambda_d^{m_d}\}$ , on  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_d$  són els valors propis de la matriu  $\mathbf{A}$  i els superíndexs denoten les seves multiplicitats;  $\lambda_0$  és simple perquè  $G$  és connex i, per tant,  $\mathbf{A}$  és irreductible. Aleshores,  $G$  és distància-regular si i només si es compleix que, per a tot vèrtex  $u$ ,

$$|\Gamma_d(u)| = n \left( \sum_{i=0}^d \frac{\pi_0^2}{m_i \pi_i^2} \right)^{-1}, \quad (6)$$

on  $\pi_i$  són paràmetres de tipus moment, els quals es poden calcular a partir de la distància entre els valors propis amb la fórmula  $\pi_i = \prod_{j=0(j \neq i)}^d |\lambda_i - \lambda_j|$ , per a  $0 \leq i \leq d$ . Com a exemples, donem l'espectre, el nombre de vèrtexs i el valor obtingut de  $|\Gamma_d(u)|$  segons (6) del graf del cub  $Q$  i del graf de Petersen  $P$ ; vegeu de nou les figures 14 i 12, respectivament:

- Cub:  $\text{sp } Q = \{3^1, 1^3, -1^3, 3^1\}$ ,  $n = 8$ ,  $|\Gamma_3(u)| = 1$ .
- Petersen:  $\text{sp } P = \{3^1, 1^5, -2^4\}$ ,  $n = 10$ ,  $|\Gamma_2(u)| = 6$ .

Com hem dit abans, la teoria de grafs distància-regulars té moltes aplicacions en teoria de codis. Un codi  $C$ , amb un conjunt de paraules permeses o *paraules-codi*, es pot representar com un subconjunt de vèrtexs d'un graf  $G$  que normalment és distància-regular; vegeu Godsil [21] i van Lint [32]. El conjunt de vèrtexs representa l'“univers” de paraules amb o sense significat que es poden rebre. A més, hi ha una aresta entre dues paraules si, amb un certa probabilitat, una es pot transformar en l'altra en el procés de transmissió. Aleshores, com més curta és la distància entre dues paraules en  $G$ , més semblants són. Si una paraula-codi no ha sofert molts canvis, la paraula resultant no està lluny de la paraula original i és possible recuperar-la (criteri de decisió per proximitat). Aleshores, un codi és millor si les paraules que el constitueixen estan lluny entre si. En l'estudi i dissenys de bons codis, s'utilitzen algunes tècniques algebraiques per obtenir informació sobre l'estructura del graf  $G$  i, en particular, sobre el subconjunt de vèrtexs  $C$  que representa el codi. En les aplicacions d'especial importància hi ha els anomenats codis *completament regulars*, els grafs dels quals estan estructurats en una mena de distància-regularitat al voltant del conjunt que constitueix el codi. Aleshores, aquests codis es poden



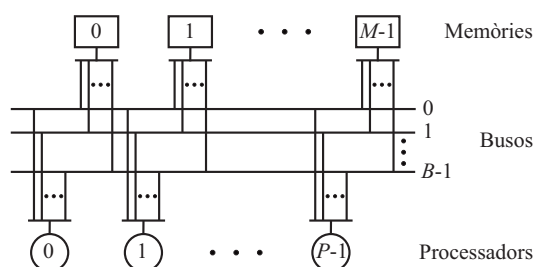


FIGURA 15: L'esquema d'interconnexió multibús complet.

caracteritzar algebraicament d'una manera similar a la caracterització dels grafes distància-regulars a través del seu espectre; vegeu Fiol i Garriga [17] per a més informació.

## 5 Casaments: els teoremes de Hall i de Menger. Xarxes multibús

Imaginem dos grups de persones heterosexuales disposades a casar-se, un de dones i l'altre d'homes, el segon almenys tan gran com el primer. Imaginem també que cada dona coneix un cert nombre d'homes. El teorema de les noces de Hall dóna les condicions necessàries i suficients perquè cada dona pugui casar-se amb un dels homes que coneix:

*Un aparellament complet és possible si i només si qualsevol grup de dones, independentment del seu nombre, coneix almenys un nombre igual d'homes.*

Curiosament, el teorema de Hall està molt relacionat amb un altre resultat clàssic de la teoria de grafes: el teorema de Menger; vegeu, per exemple, Bollobás [5]. Com en el cas del teorema de Hall, el teorema de Menger afirma que una certa condició, la qual és trivialment necessària per a que un resultat sigui cert, és també suficient. En aquest cas, el resultat no és sobre aparellaments, sinó sobre la connectivitat  $\kappa$  (o l'aresta-connectivitat  $\lambda$ ) d'un graf, la qual es defineix com la cardinalitat mínima d'un conjunt de vèrtexs (o d'arestes) l'eliminació del qual desconnectaria el graf. A aquest conjunt se l'anomena *conjunt de tall* o *conjunt separador* de  $(u, v)$ . Aleshores, el teorema de Menger afirma que, per a cada parell de vèrtexs  $u, v$  (no-adjacents, si calculem  $\kappa$ ):

*La mida mínima d'un conjunt separador (de vèrtexs o arestes)  $(u, v)$  és igual al màxim nombre de camins independents (en vèrtexs o arestes) de  $u$  a  $v$ .*

S'ha demostrat que la connectivitat (o aresta-connectivitat) d'un graf o digraf (graf en el qual cada aresta té associada una direcció) assoleix el seu valor màxim, el qual és igual al seu grau mínim, si el seu diàmetre és prou petit respecte del seu

Esquema ròmbic															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
							7	7	7	7	7	7	7	7	7
						6	6	6	6	6	6	6	6	6	
					5	5	5	5	5	5	5	5	5		
				4	4	4	4	4	4	4	4	4			
			3	3	3	3	3	3	3	3	3				
		2	2	2	2	2	2	2	2	2					
	1	1	1	1	1	1	1	1	1						
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0						

TAULA 2: Representació matricial de l'esquema *ròmbic* amb  $M = 16$  i  $B = 8$  (les components indiquen els busos connectats a mòduls de memòria).

coll (vegeu Fàbrega i Fiol [11]) o si el seu nombre de vèrtexs és prou gran respecte del seu diàmetre (vegeu Fiol [13]).

Els dos teoremes esmentats, el de Hall i el de Menger, tenen moltes aplicacions en l'estudi i el disseny de les xarxes d'interconnexió (per exemple, entre processadors) i en xarxes de comunicació. Aquí expliquem una aplicació del teorema de Hall a l'estudi de les *xarxes d'interconnexió multibús*: un sistema de multiprocessadors amb memòria compartida i xarxes d'interconnexió multibús consisteix en  $P$  processadors,  $B$  busos i  $M$  mòduls de memòria amb  $B \leq \min\{P, M\}$ . Els processadors tenen accés als mòduls de memòria a través dels busos, de manera que podem establir connexions processadors-busos i busos-memòries. Per tant, hi ha  $m \leq M$  requeriments dels processadors per accedir als diferents mòduls de memòria. Com que cada connexió processador-memòria requereix un bus, si  $m \leq B$  caldran  $m$  busos; en canvi, si  $m > B$ , aleshores caldran  $B$  busos. En l'esquema complet (vegeu la figura 15), cada bus es connecta a totes les memòries i a tots els processadors. Això representa  $B(P + M)$  connexions i, normalment, és un estalvi important respecte la xarxa *creuada* (crossbar) amb  $PM$  connexions, una connexió entre cada parell processador-memòria.

Com que el cost de la xarxa depèn bàsicament del nombre de connexions, considerem la redundància d'aquest esquema, és a dir, quin és el màxim nombre de connexions que es poden eliminar sense que el sistema es degradi? En altres paraules, *quants dels  $m \leq B$  processadors poden tenir accés a qualsevol dels  $m$  mòduls de memòria diferents?* La resposta és que el màxim nombre de connexions redundants és  $B(B - 1)$ . Aquest valor s'obté de les anomenades *topologies mínimes* com, per exemple, la topologia *ròmbica* (taula 2) i la *d'escala* (taula 3). Es poden trobar més detalls en Fiol, Valero, Yebra i Lang [19] i en Lang, Valero i Fiol [27]. En aquest context, el teorema de Hall s'utilitza per donar una caracterització de les topologies d'interconnexió que eviten la degradació del sistema, com en el cas esmentat de les topologies completa i mínima:

Esquema d'escala															
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
							7	7	7	7	7	7	7	7	7
						6		6	6	6	6	6	6	6	6
					5			5	5	5	5	5	5	5	5
				4				4	4	4	4	4	4	4	4
			3					3	3	3	3	3	3	3	3
		2						2	2	2	2	2	2	2	2
	1							1	1	1	1	1	1	1	1
0								0	0	0	0	0	0	0	0

TAULA 3: Representació matricial de l'esquema *d'escala* amb  $M = 16$  i  $B = 8$  (les components indiquen els busos connectats a mòduls de memòria).

*Un sistema multibús no pateix degradació si i només si qualsevol dels  $p \leq B$  parells disjunts de processador-memòria estan connectats a un conjunt d'almenys  $p$  busos.*

La demostració és com segueix. Per a cada bus  $i$ ,  $0 \leq i \leq B - 1$ , siguin  $p_i$  i  $m_i$ , respectivament, el nombre de processadors i de memòries que té connectats. Anàlogament, siguin  $\bar{p}_i$  i  $\bar{m}_i$  els corresponents nombres de processadors i memòries desconnectats. Evidentment,  $p_i + \bar{p}_i = P$  i  $m_i + \bar{m}_i = M$ . El resultat anterior afirma que, en un sistema no degradat, cada bus  $i$  es pot desconnectar de, com a màxim,  $B - 1$  processadors o memòries, és a dir,  $\bar{p}_i + \bar{m}_i = B - 1$  per a  $0 \leq i \leq B - 1$ . Però també podem dir que cada bus ha de tenir més de  $P + M - B$  connexions, de manera que  $p_i + m_i > P + M - B$  per a  $0 \leq i \leq B - 1$ . Suposem que, al contrari, per a cada bus  $i$ , tenim  $\bar{p}_i + \bar{m}_i \geq B$ . Siguin  $k_1, k_2, \dots, k_y$  amb  $y \leq P_i \leq P$  i  $j_1, j_2, \dots, j_x$  amb  $x \leq \bar{m}_i \leq M$ , respectivament, els processadors i les memòries no connectades al bus  $i$ . Notem que  $x + y = B$ . Considerem ara  $x$  altres processadors  $k_{y+1}, k_{y+2}, \dots, k_{y+x}$  i  $y$  altres memòries  $j_{x+1}, j_{x+2}, \dots, j_{x+y}$ , com a la figura 16. Sigui  $(k, j)$  la demanda del processador  $k$  per accedir a la memòria  $j$ . Cap de les  $B$  demandes

$$(k_1, j_{x+1}), (k_2, j_{x+2}), \dots, (k_y, j_{x+y}), (k_{y+1}, j_1), (k_{y+2}, j_2), \dots, (k_{y+x}, j_x)$$

no pot utilitzar el bus  $i$  i això significa que el sistema es degrada.

### Agraïments

Agraïm als professors J.L.A. YEBRA i E. GARRIGA l'ajuda que ens han donat en aquest article. La recerca per a aquest article ha estat finançada amb el projecte MTM2008-06620-C03-01 del Ministeri de Ciència i Educació i l'European Regional Development Fund i el projecte 2009SGR1387 del Consell Interdepartamental de Recerca i Innovació Tecnològica (CIRIT) de la Generalitat de Catalunya.

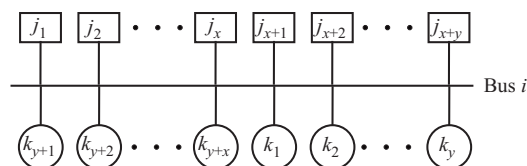


FIGURA 16: Part d'un sistema que es degrada.

## Referències

- [1] AIGNER, M.; ZIEGLER, G.M. *Proofs from THE BOOK*. Berlín: Springer, 1998.
- [2] APPLE, K.; HAKEN, W. *Every planar map is four colorable*. Contemporary Math. 98. Providence: American Mathematical Society (AMS), 1989.
- [3] BIGGS, N.L. *Algebraic Graph Theory*. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [4] BIGGS, N.L.; LLOYD, E.K.; WILSON, R.J. *Graph Theory: 1736-1936*. Oxford: Clarendon Press, 1976.
- [5] BOLLOBÁS, B. *Graph Theory: An Introductory Course*. Nova York: Springer, 1979.
- [6] BROUWER, A.E.; COHEN, A.M.; NEUMAIER, A. *Distance-Regular Graphs*. Berlín: Springer-Verlag, 1989.
- [7] BROUWER, A.E.; HAEMERS, W.H. «Association schemes». A: GRAHAM, R.L. ET AL., eds. *Handbook of Combinatorics*. Vol. 1–2. Amsterdam: Elsevier (North-Holland), 1995. 747–771.
- [8] ERDŐS, P.; RÉNYI, A.; SÓS, V. «On a problem of graph theory». *Studia Sci. Math.*, **1**, (1966), 215–235.
- [9] EULER, L. «Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis». *Commentarii academiae scientiarum petropolitanae*, **8**, (1741), 128–140.
- [10] EULER, L. «Elementa doctrine solidorum». *Novi comm. acad. scientiarum imperialis petropolitanae*, **4**, (1752-1753), 109–160.
- [11] FÀBREGA, J.; FIOL, M.A. «Maximally connected digraphs». *J. Graph Theory*, **13**, (1989), 657–668.
- [12] FIOL, M.A. «A Boolean algebra approach to the construction of snarks». A: ALAVI, Y.; CHARTRAND, G.; OELLERMANN, O.R.; SCHWENK, A.J., eds. *Graph Theory, Combinatorics and Applications*. Vol. 1. Nova York: John Wiley & Sons, 1991. 493–524.
- [13] FIOL, M.A. «The connectivity of large digraphs and graphs». *J. Graph Theory*, **17**, (1993), 31–45.
- [14] FIOL, M.A. «Algebraic characterizations of distance-regular graphs». *Discrete Math.*, **246**, (2002), no.1-3, 111–129.

- [15] FIOL, M.A.; FIOL, M.L. «Coloracions: un nou concepte dintre la teoria de coloració de grafes». *L'Escaire*, **11**, (1984), 33–44.
- [16] FIOL, M.A.; GARRIGA, E. «From local adjacency polynomials to locally pseudo-distance-regular graphs». *J. Combin. Theory Ser. B*, **71**, (1997), 162–183.
- [17] FIOL, M.A.; GARRIGA, E. «On the algebraic theory of pseudo-distance-regularity around a set». *Linear Algebra Appl.*, **298**, (1999), no. 1-3, 115–141.
- [18] FIOL, M.A.; GARRIGA, E.; YEBRA, J.L.A. «Avoiding monocoloured triangles when colouring  $K_n$ ». Article de recerca, Universitat Politècnica de Catalunya, (1995).
- [19] FIOL, M.A.; VALERO, M.; YEBRA, J.L.A.; LANG, T. «Reduced interconnection networks based on the multiple bus for multimicroprocessor systems». *International Journal of Mini and Microcomputers*, **6**, (1984), no. 1, 4–9.
- [20] GADNER, M. «The Annotated Snark». A: CARROLL, L. *The Hunting of the Snark*. Nova York: Penguin Books, 1974.
- [21] GODSIL, C.D. *Algebraic Combinatorics*. Nova York: Chapman and Hall, 1993.
- [22] GODSIL, C.D.; ROYLE, G. *Algebraic Graph Theory*. New York: Springer-Verlag, 2001.
- [23] HARARY, F. *Graph Theory*. Reading: Addison-Wesley, 1969.
- [24] HEAWOOD, P.J. «Map Colour Theorems». *Quart. J. Math.*, **24**, (1890), 332–338.
- [25] ISAACS, R. «Infinite families of nontrivial graphs which are not Tait colorable». *Amer. Math. Monthly*, **82**, (1975), no. 3, 221–239.
- [26] ISAACS, R. «Loupekhine's snarks: a bifamily of non-Tait-colorable graphs», *Technical Report*, **263**, Dept. of Math Sci., The Johns Hopkins University, Maryland, USA, (1976).
- [27] LANG, T.; VALERO, M.; FIOL, M.A. «Reduction of connections for multibus organization». *IEEE Trans. Comput.*, **C-32**, (1983), no. 8, 707–716.
- [28] PETERSEN, J. «Sur le théorème de Tait». *L'Intermédiaire des Mathématiciens* **5** (1898) 225–227.
- [29] RADEMACHER, H; TOEPLITZ, O. *Números y Figuras*. Madrid: Alianza Editorial, 1970.
- [30] RADZISZOWSKI, S.P. «Small Ramsey numbers». *Electron. J. Combin.*, **1**, (2006), Dynamic Survey 1.
- [31] TAIT, P.G. «Remarks on the colouring of maps». *Proc. Roy. Soc. Edimburgh*, **10**, (1880), 501–503, 729.
- [32] VAN LINT, J.H. *Introduction to Coding Theory*. Tercera edició. Berlín: Springer, 1999.

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA  
{cdalfo,fiol}@ma4.upc.edu